

耦合 Galerkin 简正波解的抛物方程方法 水下声传播计算

杨燕明¹, 李燕初¹

(1. 国家海洋局 第三海洋研究所, 福建 厦门 361005)

摘要: 研究水平变化的海洋环境下声传播的计算方法. 把 Galerkin 方法的简正波解应用于耦合简正波抛物方程, 可同时考虑海水和海底声场计算, 对水平变化的海洋环境问题的数值计算表明, 在包含海水和海底的声场计算中该方法的计算结果都具有较高的精度.

关键词: Galerkin 方法; 简正波; 耦合简正波抛物方程方法

中图分类号: 733 21; 0427 1

文献标识码: A

文章编号: 0253-4193(2007)06-0033-07

1 引言

对于水平不变和变化的海洋环境, 近年来已开发了许多声场计算模型^[1], 主要有射线模型、简正波(NM)模型、抛物方程(PE)模型以及有限差分法和有限元法等. 水平变化的简正波模型主要有耦合简正波模型, 如较流行的 COUPLE97 算法, 常用来计算基准解, 该方法计算精确度较高, 但计算时间相对较长. 抛物方程方法较适合于计算低频远场的情况. 1997 年 Abawi 等^[2]结合简正波与抛物方程理论提出了一种较新型的声场计算模型, 称为耦合简正波抛物方程方法(CMPE), 这种方法在垂直方向可用较少的简正波来描述垂向的声场变化, 在水平方向采用抛物方程方法来求解简正波的幅值系数. 在频率较高时, PE 方法中因垂直网格步长一般要小于 1/4 波长^[3], 垂直网格划分必须加密, 从而使计算时间成倍地增加, CMPE 克服了 PE 方法难以用于高频的问题. CMPE 在垂向用简正波来描述, 它也能用于近场的计算. CMPE 方法中所包含的耦合系数考虑了海底地形变化及海水声速水平变化等的影响, 可改善绝热抛物方程方法的计算结果.

在 CMPE 模型中简正波的计算是模型的一个

关键的部分, 国内的彭朝晖和李风华^[4]基于 WKBZ 简正波理论进行了耦合简正波抛物方程的声场计算研究. 该方法有快速计算局地简正波特征值和特征函数的优点, 使 CMPE 在海水声场计算速度方面得到很大提高.

对于近程、低频、浅海的情况, 考虑海水和海底底质变化的分层介质声场计算是很重要的, 它更能反映声音在海洋中传播的真实情况. 为了适用于分层介质的声场计算, 并能较准确地计算局地简正波的特征值和特征函数, 本文的 CMPE 方法在计算局地简正波时采用了 Galerkin 方法^[5,6].

2 耦合简正波-抛物方程方法

在图 1 的海洋声道中海水和沉积物的总深度为 H , 海面为自由平面, 水深 $h(r)$ 沿距离 r 平缓变化, 介质密度 $\rho(r, z)$ 、声速 $c(r, z)$ 随距离和深度变化. 设 $h(r)$ 以上为水层, 以下为沉积物层. 略去时间依赖关系 $e^{-i\omega t}$, 在柱坐标系中, 在简谐点源作用下声道中声场满足下述方程(1)和边界条件(2)^[3,4]:

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2 p = - \frac{\delta(r) \delta(z - z_s)}{2\pi r}, \quad (1)$$

收稿日期: 2006-11-21; 修订日期: 2007-05-08

基金项目: 中央级公益性科研院所基本科研业务费专项资金资助项目(海三科 2007020).

作者简介: 杨燕明(1966-), 男, 福建省莆田市人, 研究员, 从事海洋声学及遥感海洋学研究. E-mail: zanghong klsq@mail.com

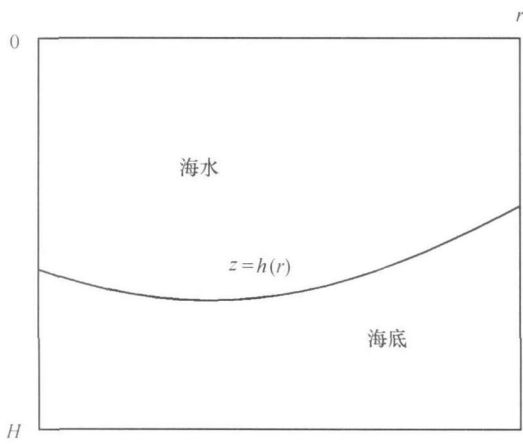


图1 水平变化声道几何示意图

$$\left. \begin{aligned} p(r, 0) &= 0 \\ p(r, h_1) &= p(r, h_2) \\ \frac{1}{\rho(r, h_1)} \frac{\partial p(r, h_1)}{\partial n} &= \frac{1}{\rho(r, h_2)} \frac{\partial p(r, h_2)}{\partial n} \\ p(r, z) |_{z \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

式中, $p(r, z)$ 为声压; $k = \omega/c(z)$, 为波数, ω 为圆频率; z_s 为声源深度; $p(r, h_1)$ 、 $p(r, h_2)$ 、 $\rho(r, h_1)$ 、 $\rho(r, h_2)$ 分别为海底处上下表面的值; $\frac{\partial}{\partial n}$ 为海底的法向导数.

假设密度只是深度方向的函数, 不随水平距离变化, 即 $\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$, 提出因子 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 后, 波动方程的齐次形式为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right] + k^2 p = 0. \quad (3)$$

上述波动方程(3)的解可用局地简正波来表示, 设其解为如下形式:

$$p(r, z) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \varphi_n(r, z) / k_n^{-\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

式中, k_n , $\varphi_n(r, z)$ 分别为局地简正波的特征值和特征函数; $a_n(r)$ 称为简正波的幅值系数. k_n , $\varphi_n(r, z)$ 要满足波动方程

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(r, z)}{\partial z^2} + [k^2 - k_n^2] \varphi_n(r, z) = 0 \quad (5)$$

和相应的边界条件

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(r, 0) &= 0 \\ \varphi_n(r, h_1) &= \varphi_n(r, h_2) \\ \frac{1}{\rho(r, h_1)} \frac{\partial \varphi_n(r, h_1)}{\partial n} &= \frac{1}{\rho(r, h_2)} \frac{\partial \varphi_n(r, h_2)}{\partial n} \\ \varphi_n(r, z) |_{r \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

特征函数 $\varphi_n(r, z)$ 为一完备系, 满足正交归一化条件:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \varphi_m \varphi_n dz = \delta_{mn}, \quad (7)$$

式中, δ_{mn} 为 Kronecker δ 函数.

把式(4)代入式(3), 利用式(5)和(7), 并忽略高阶耦合项后, 简正波的幅值系数 $a_n(r)$ 满足下面的方程^[2,4]:

$$\frac{\partial^2 a_n(r)}{\partial r^2} + k_n(r) a_n(r) = - \sum_{m=1}^{\infty} 2b_{nm}(r) \frac{\partial a_m(r)}{\partial r}, \quad (8)$$

式中, $b_{nm}(r) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \varphi_n(r, z) \frac{\partial \varphi_m(r, z)}{\partial r} dz$, 为耦合项. 式(8)可写成矩阵的形式:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2} + 2\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} + \mathbf{K}^2 \mathbf{A} = 0. \quad (9)$$

对方程(9)进行算子分解并忽略向后传播的能量, 可得

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} = -\mathbf{B}\mathbf{A} + i\sqrt{\mathbf{K}^2} \mathbf{A}, \quad (10)$$

略去高阶简正波后, $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$. 耦合系数矩阵 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{bmatrix}.$$

局地简正波特征值矩阵 \mathbf{K}^2 为

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} k_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_N^2 \end{bmatrix}.$$

在用式(5)、(6)解出 k_n , $\varphi_n(r, z)$ 后, 上述式(10)可用 Crank-Nicolson 方法进行积分, 把所得的幅值系数 $a_n(r)$ 和简正波 k_n , $\varphi_n(r, z)$ 等参数代入式(4)后即可得到声压场的解.

3 简正波特征值的解

本节用较简化的二层介质情况(图1)来阐明如何用 Galerkin 方法求简正波方程(5)、(6)复数特征值的解. Galerkin 方法是一种加权余量法, 取它的权函数为基函数.

在某距离 r 上, 令 $y = \varphi_n(r, z)$, $k_n = kb(1 - \lambda_n)^{1/2}$, 式(5)、(6)可改写成^[5,6]

$$Ly = \lambda y, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) = y(H) = 0 \\ y(h^-) = y(h^+) \\ \frac{1}{\rho_w} y'(h^-) = \frac{1}{\rho_b} y'(h^+) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

式中,深度向算子 L 为

$$L = \begin{cases} -\frac{1}{k_b^2} \frac{d^2}{dz^2} + [1 - n_w^2(z)], & 0 < z < h, \\ -\frac{1}{k_b^2} \frac{d^2}{dz^2} + (1 - n_b^2), & h < z < H, \end{cases}$$

式中, $n_w^2(z) = k_w^2/k_b^2$, 是海水的折射率; $n_b^2 = 1 - \varepsilon$, 是海底的折射率; ε 为海底的衰减系数; h 是海水的深度; h^- , h^+ 分别表示海底的上下表面. 在上述的推导中因假设水深 $h(r)$ 沿距离方向平缓变化, 倾斜海底近似为分段阶梯状, 式(6)中的 $\partial/\partial n$ 近似为 $\partial/\partial z$, 即 $y' = dy/dz$. 上述的 λ 和函数 $\varphi_n = \varphi(z, \lambda)$ 是式(11)、(12)边值问题的特征值和特征函数.

考虑一个简化的问题, 即声道中海水介质是均匀的, 声速为 \bar{c}_w [\bar{c}_w 为 $c_w(z)$ 的平均值], 而且海底没有衰减, 即 $\varepsilon = 0$, 此时有

$$k(z) = \begin{cases} \bar{k}_w, & 0 < z < h, \\ k_b, & h < z < H, \end{cases}$$

式中, $\bar{k}_w = \omega \bar{c}_w$. 此时式(11)相应变为

$$L_0 y = \lambda y, \quad (13)$$

式中, 深度向算子 L_0 为

$$L_0 = \begin{cases} -\frac{1}{k_b^2} \frac{d^2}{dz^2} + [1 - \bar{n}_w^2(z)], & 0 < z < h, \\ -\frac{1}{k_b^2} \frac{d^2}{dz^2} + (1 - n_b^2), & h < z < H, \end{cases}$$

其中, $\bar{n}_w = \bar{k}_w/k_b$, 是海水中的折射率. 设海底的折射率 n_b 等于 1, 这时满足式(13)和边界条件(12)的解为

$$\phi(z, \gamma_n) = \begin{cases} \sin \alpha z, & 0 < z < h, \\ \frac{\sin \alpha}{\sin[\beta(h-H)]} \sin[\beta(z-H)], & h < z < H, \end{cases} \quad (14)$$

式中, $\alpha = [\bar{k}_w^2 + k_b^2(\gamma_n - 1)]^{1/2}$, $\beta = (k_b^2 \gamma_n)^{1/2}$, 它们分别为海水和海底沉积物中的垂直波数, γ_n 为相应的特征值. 特征函数 $\phi(z, \gamma_n)$ 满足正交关系:

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \phi(z, \gamma_m) \phi(z, \gamma_n) dz = \delta_{mn}.$$

将深度向算子 L_0 增加一个增量, 即

$$(L_0 + \Delta L)y = \lambda y, \quad (15)$$

式中, $\Delta L = \begin{cases} \bar{n}_w^2 - n_w^2(z), & 0 < z < h, \\ -\varepsilon, & h < z < H, \end{cases}$

它是算子 L 和 L_0 之差. 式(15)代表的是海水非均匀、海底有衰减的一般性问题, 下面取上述简化问题的解 $\phi_n = \phi(z, \gamma_n)$ 为基函数来构造方程(15)的近似解:

$$y(z, \lambda) = \sum_{n=1}^N u_n \phi(z, \gamma_n), \quad (16)$$

式中, u_n 是待定系数. 将式(16)代入式(15)得

$$\sum_{n=1}^N u_n (\gamma_n \phi_n + \Delta L \phi_n) = \lambda \sum_{n=1}^N u_n \phi_n. \quad (17)$$

应用 Galerkin 方法, 即将式(17)乘上 ϕ_m , 并应用正交关系可得到矩阵特征值方程:

$$\hat{C}u = \lambda u, \quad (18)$$

式中, $u = [u_1, u_2, \dots, u_N]$; \hat{C} 是 $N \times N$ 矩阵, 它的矩阵元素为

$$c_{mn} = \gamma_n \delta_{mn} + \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \phi_m \Delta L \phi_n dz.$$

解矩阵特征方程(18)可以得出复数特征值 λ_n 和相应的复系数矢量 u_n , 由式(16)可得到与特征值 λ_n 相应的特征函数 $\varphi(z, \lambda_n) = y(z, \lambda_n)$.

4 算例

为检验本文所述的 CMPE 方法, 我们计算了三个与距离有关的声场的例子, 这些例子是浅海声学建模常用的检验问题^[1]. 例 1 是有倾斜海底的声传播问题, 例 2 是有海山地形的声传播问题, 例 3 是过渡海域的声传播问题, 并把它们与 COUPLE97 的计算结果进行了比较.

4.1 有倾斜海底的声传播问题

有倾斜海底的声传播问题的几何示意图如图 2 所示. 海水在 0~2 km 内, 水深均为 200 m, 在 2~10 km, 水深由 200 m 线性减至 0 m. 海水和海底都为均匀介质, 其中海水声速为 1.5 km/s, 海水密度为 1 g/cm³, 海底声速为 1.7 km/s, 海底密度为 1.5 g/cm³, 海底的衰减系数为 0.5 λ^{-1} (λ 为波长). 图 3 是声源深度 100 m, 频率分别为 25 和 100 Hz, 接收深度为 30 m 的计算结果(本文计算结果标记为 CMPE)与 COUPLE97 计算结果的比较. 频率 25 Hz 时 CMPE 与 COUPLE97 的结果的平均偏差为 1.7 dB(包括海水和海底), 100 Hz 时为 3.0 dB, 说明本方法的传播损失计算结果与 COUPLE97 计算结果相差较小, 可达到较高的精确度. 本文采用 Galerkin 方法求简正波的解, 每个水平距离步长上都要求解一复数特征值问题, 在计算速度方面并不具有优势. 在这个例子中, 对于 25 Hz, 简正波数目

为 25 的情况,用同一台计算机 COUPLE97 计算所需时间为 238 s,而 CMPE 对于计算不同距离步长

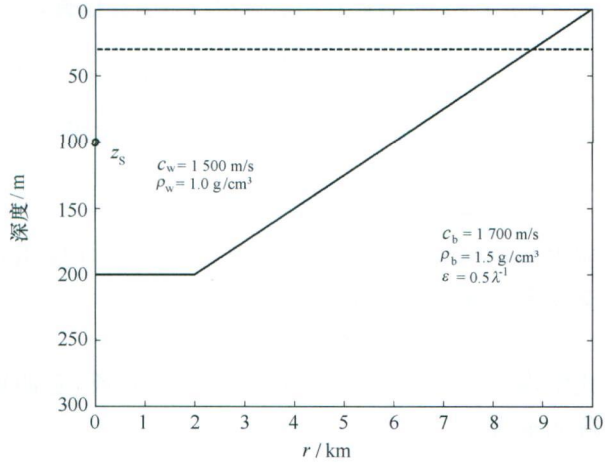


图 2 有倾斜海底的声传播问题的几何示意图

和简正波数目下所得结果与 COUPLE97 的平均偏差和所需计算时间如表 1 所示.

表 1 不同计算步长和简正波数目下 CMPE 结果与 COUPLE97 的平均偏差、所需计算时间的比较

计算步长/m	简正波数目	与 COUPLE97 的平均偏差/dB	CMPE 计算时间/s
2	25	1.74	552
2	15	1.76	202
2	10	2.10	102
4	15	2.40	101

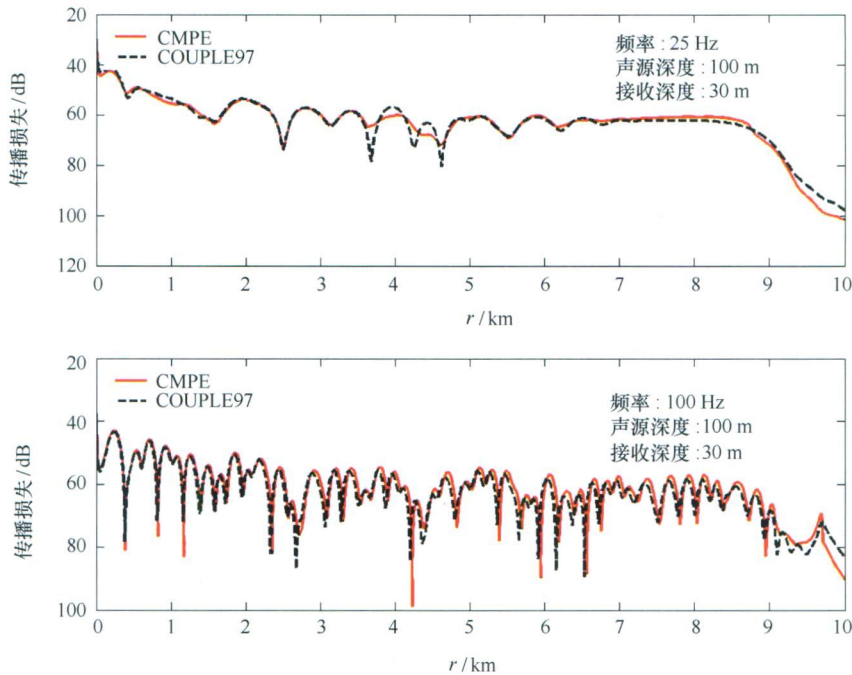


图 3 有倾斜海底的计算声传播损失比较

由表 1 可看出,在保证一定的计算精度下,取一个适当的距离步长和简正波数目进行计算,用 CMPE 方法可以提高计算速度.

4.2 海山地形的声传播问题

海山地形声传播问题的几何示意图如图 4 所示.海水在 0~2 km 内,水深均为 200 m;在 2~5 km 内,水深由 200 m 线性减至 80 m;在 5~8 km 范围内,水深由 80 m 线性增至 200 m;在 8~10 km 内水深均为 200 m.海水和海底介质性质如例 1 所

示.图 5 是声源深度为 50 m,频率为 50 Hz,接收深度分别为 50,120 m 的传播损失计算结果与 COUPLE97 计算结果比较图,CMPE 与 COUPLE97 的平均偏差为 1.7 dB,说明对于海山地形,本方法计算结果与 COUPLE97 的相比相差也很小.

4.3 过渡海域的声传播问题

过渡海域声传播问题的几何示意图如图 6 所示.海水在 0~2 km 内水深均为 200 m;在 2~8 km 内水深由 200 m 线性减至 80 m;在 8~10 km 内水

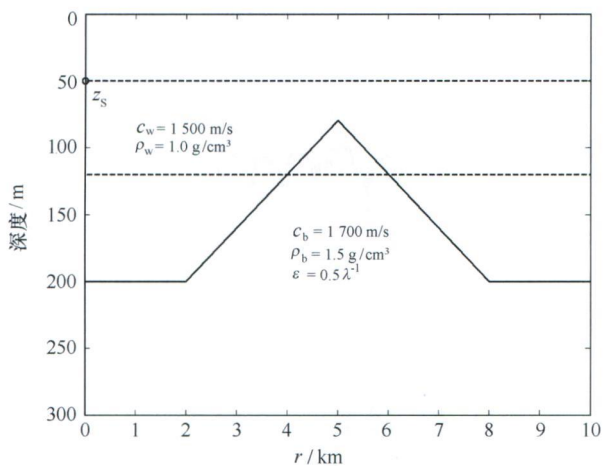


图4 海山地形声传播问题的几何示意图

深均为 80 m. 海水和海底介质性质如例 1 所示. 图 7 是声源深度为 50 m, 频率为 100 Hz, 接收深度分别为 50, 100 m 的计算结果与 COUPLE97 计算结果的比较, CMPE 与 COUPLE97 的平均偏差为 3.0 dB. 图 8 是声源深度为 50 m, 频率为 25 Hz, 水平方向声传播损失计算结果与 COUPLE97 计算结果的比较, CMPE 与 COUPLE97 的平均偏差为 2.1 dB. 对于过渡海域地形的声传播, 本方法的传播损失计算结果与 COUPLE97 的相比相差也较小.

由上述三个例子计算结果与 COUPLE97 结果的比较可以看出本文 CMPE 的计算结果与 COUPLE97 的结果较接近.

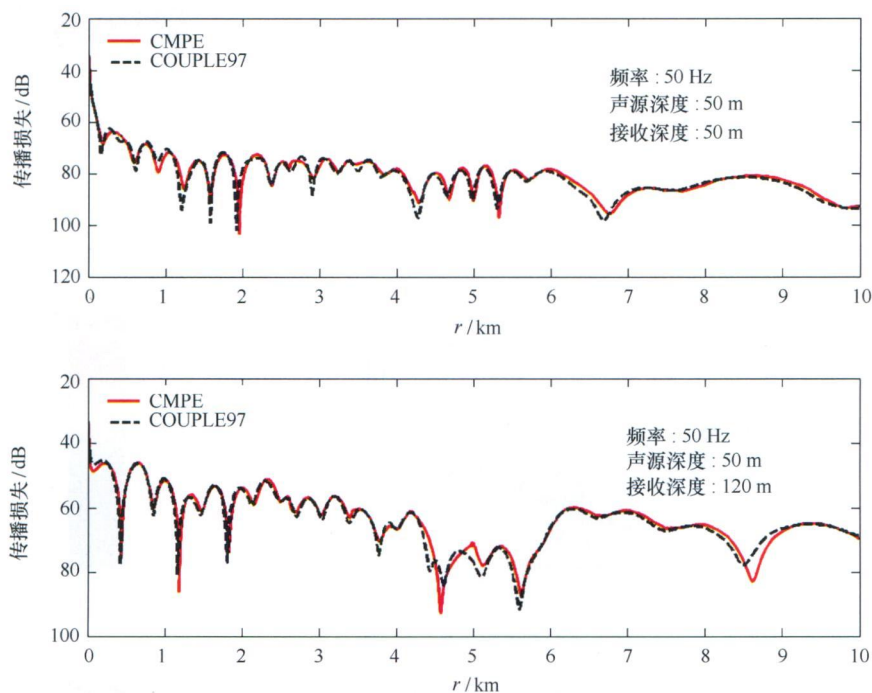


图5 海山地形的计算声传播损失比较

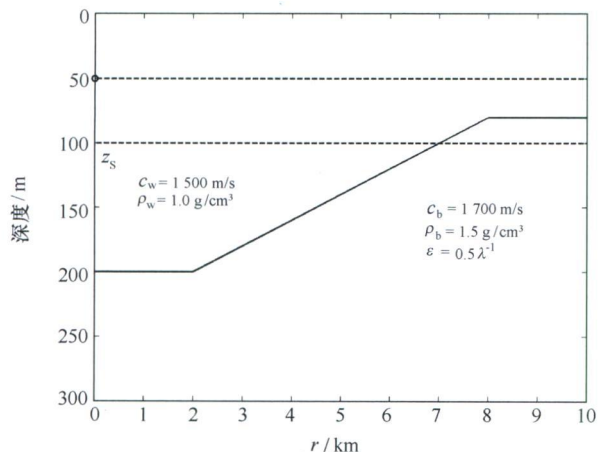


图6 过渡海域声传播问题的几何示意图

5 小结和讨论

(1) 本文在包括海水和沉积物的深度方向采用 Galerkin 方法得到各距离段的简正波解, 而在水平方向采用抛物方程方法进行计算, 使本文的 CMPE 方法适用于包含海水和沉积物的分层介质声场的计算.

(2) 本文 CMPE 的传播损失计算结果与 COUPLE97 的结果的平均偏差大致在 1.5~3.0, 说明本文计算方法可达到较高的精确度.

(3) 在计算中水平距离步长一般要取声波波长的分数值, 对于高频问题的计算, 仍需较多的计算时间, 有待进一步改进, 提高计算速度.

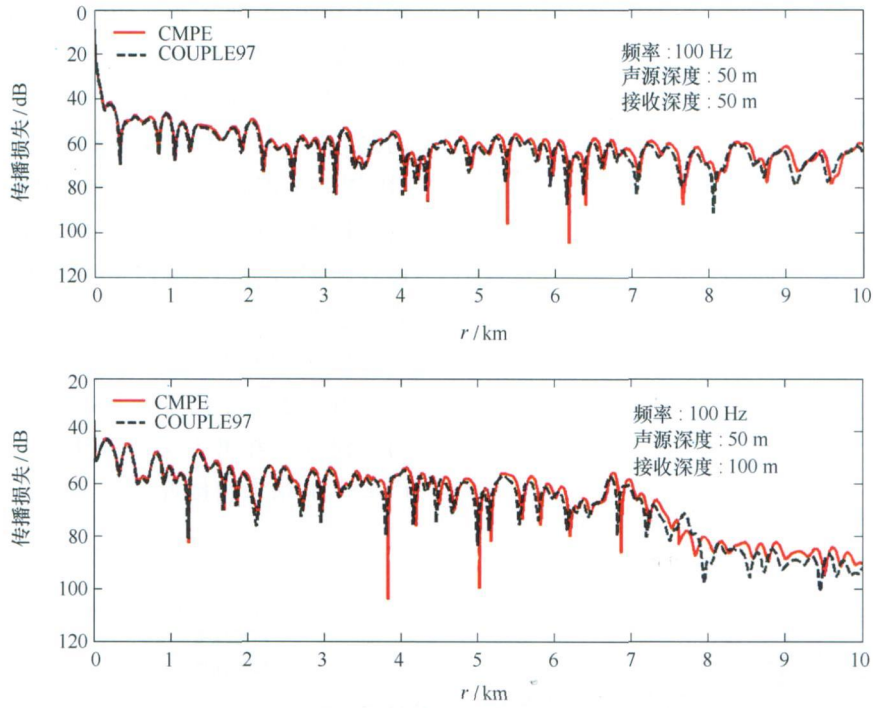


图7 过渡海域的计算声传播损失比较

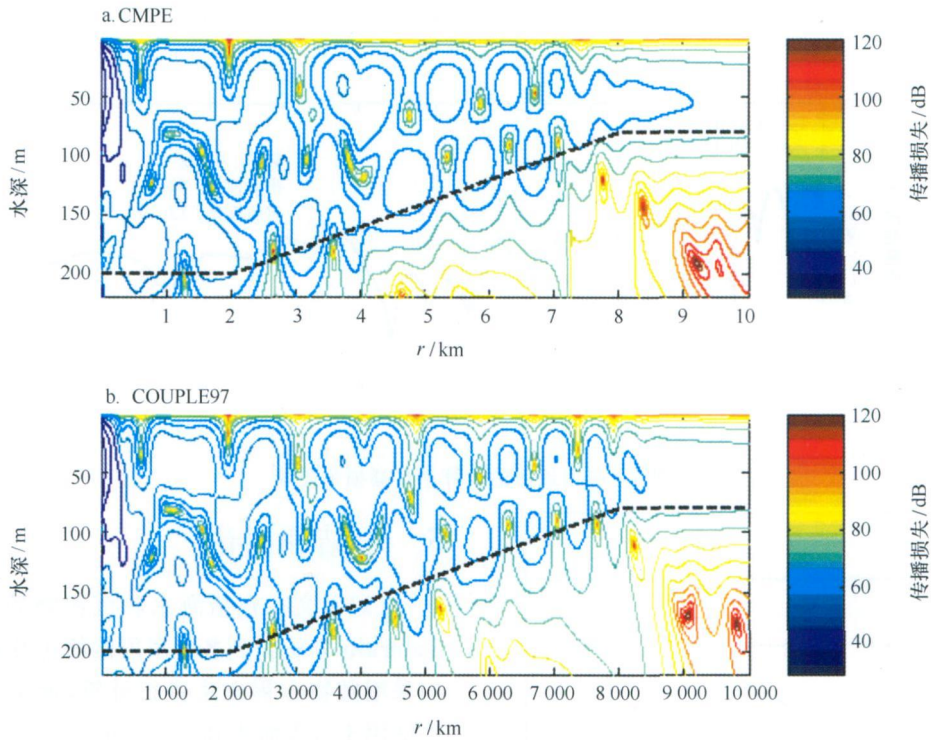


图8 过渡海域剖面声传播损失比较(频率为 25 Hz)

参考文献:

- [1] PAUL C Etter. 水声建模与仿真[M]. 第3版. 蔡志明等译. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [2] ABAWIA T, KUPENNAN W A, COLLINS M D. The coupled mode parabolic equation[J]. *Acoust Soc Am*, 1997, 102(1): 233—238.
- [3] JENSEN F B, KUPENNAN W A, PORTER M B, et al. *Computational Ocean Acoustics*[M]. New York: AIP Press, 1993.
- [4] 彭朝晖, 李风华. 基于 WKBZ 理论的耦合简正波-抛物方程理论[J]. *中国科学(A 辑)*, 2001, 31(2): 165—172.
- [5] EVANS R B. A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom[J]. *J Acoust Soc Am*, 1983, 74(1): 188—195.
- [6] EVANS R B, GILBERT K E. Acoustic propagation in an refracting ocean waveguide with an irregular interface[J]. *Comp Maths Appl*, 1985, 11: 795—805.

The coupled mode-parabolic equation method with Galerkin's mode solution for the underwater sound propagation

YANG Yan-ming¹, LI Yan-chu¹

(¹ *Third Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Xiamen 361005, China*)

Abstract: A method of sound propagation in a range-dependent underwater environment is presented. This method is based on the coupled mode-parabolic equation method (CMPE) and the normal mode solution is carried out with the aid of Galerkin's method. The sound fields both in water volume and sediment are predicted. The numerical examples are given to illustrate the accuracy of CMPE with Galerkin's mode solution.

Key words: Galerkin's method; normal mode; coupled mode-parabolic equation method