

# 波、流联合作用下海洋平台张力腿的 涡激非线性振动

董艳秋

(天津大学)

**摘要** 本文研究深水张力腿平台(以下简称TLP)的张力腿在波、流联合作用下涡街激起的振动。在所建立的数学模型中既考虑平方流体阻尼项,同时又计及中心激振影响。文中假定微幅波和线性分布的不均匀流是沿同一方向的。事实上,此方法可扩展到波、流呈任意角度的情况下,沿流向或垂直流向动力响应的研究。

采用了多项伽僚金法和综合数值解法,以Conoco's Hutton张力腿平台为例,计算了当涡激频率与张力腿固有频率相近发生谐振时,张力腿涡激非线性动力响应,给出一些重要结果。

**关键词** 非线性振动 涡街 谐振(锁定)

## 前言

随着海上石油的开发不断向深水区域发展,近10余年中张力腿平台已成为一种引人注目的新式海洋平台,其水深从100m到600m,平台本身有钢质的,亦有混凝土的。诸如北海英国海域内的Hutton Tension Leg Platform、挪威海域的Conoco's Tension Leg Platform和Tecnonare's TLP等。我国现在以近海开发为主,但已经向深海发展,采用TLP这种新式结构是必然的。

涡街引起海洋工程结构物的振动问题早已提出,此问题对深水张力腿平台的重要部分张力腿尤为重要。

关于作用在圆柱上的流体动力及圆柱的动力响应已有许多研究成果。其中 King<sup>[1]</sup> 和 Sarpkaya<sup>[2]</sup> 综述了近百余篇论文,详细讨论了水流通过固定不动的圆柱体产生的涡街以及柱体振动对其影响。他们提出,当涡激频率与结构的固有频率相近时产生谐振的机理。国内这方面研究亦有不少成果。

关于预报均匀流中圆柱的动力响应有一些数学模型,如尾流振子模型(wake oscillation model)、相关模型(correlation model)和统计模型(statistical model),其中 Iwan 和 Blevins 在1978年提出的尾流振子模型得到了广泛应用。1981年 Iwan<sup>[3]</sup> 又将此模型发展到预报非均匀流中圆柱的动力响应,给出了半经验公式。在这些半经验公式的基础上, Lyons 和 Patel<sup>[4]</sup> 提出用时域分析法预报钻杆及张力腿在波、流及平台运动共同作用下

的振动。另外,还有一些研究是将莫里逊(Morison)公式中的非线性流体阻尼项线性化,用模态分析方法预报钻杆、张力腿的涡激响应,如Rajabi等人<sup>[5]</sup>的论文。1990年中国船舶研究中心甘锡林和朱胜昌<sup>[6]</sup>对单点系泊立管的水弹性分析亦是将流体阻尼线性化处理的。

与以往的研究比较,本文具有以下特点:(1)考虑了流体平方阻尼和中心激振两个非线性项;(2)采用多项伽僚金法求解;(3)考虑波浪和流共同作用下张力腿的动力响应。

## 1 运动方程

虽然张力腿平台的腿本身刚度很小,但它们受的张力却很大。这种结构可以简化为受张力的梁。为使数学模型简单明确,引进下列假设:

1. 因预张力比其自重很大,故忽略张力沿长度的变化。
2. 由顶部张力变化而产生的中心激振,其频率取其平台的最大升沉运动相应的频率。
3. 假定波、流沿同一方向,流沿水深为直线变化。
4. 张力腿几何尺寸、材料性质沿长度方向都是一致的。

系统的坐标系和波、流分布情况如图1所示。坐标原点设在海底端, $z$ 轴向上为正,波、流都沿 $x$ 轴正方向传播。

在上述假设下,张力腿运动方程可以表示为:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - (T_0 + T \cos \omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_y(z, t), \quad (1)$$

式中, $EI$ 为张力腿的弯曲刚度, $T_0$ 为预张力, $\omega$ 为中心激振频率, $T$ 为动张力, $c$ 为结构粘性阻尼系数, $m$ 为单位长度结构的质量, $F_y(z, t)$ 为沿 $y$ 方向每单位长度上流体总作用力。

视张力腿为两端简支结构,其边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} y(0, t) = y(l, t) = 0 \\ \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad \text{在 } z=0 \text{ 和 } z=l \text{ 处} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

下面讨论流体作用力。垂直于水流方向的波、流联合作用的流体力可分为两部分,一是由于涡旋串作用而产生的升力 $F_L(z, t)$ ,另一个是由张力腿在 $y$ 方向运动而产生的流体阻尼力 $F_r(z, t)$ ,即:

$$F_y(z, t) = F_L(z, t) - F_r(z, t), \quad (3)$$

其中单位长度的升力 $F_L(z, t)$ 可近似表示为涡旋串频率的简谐函数,这种近似在涡串有定义的雷诺数范围内成立,其中包括涡激频率与结构频率相近而产生谐振的情况(lock-on)。

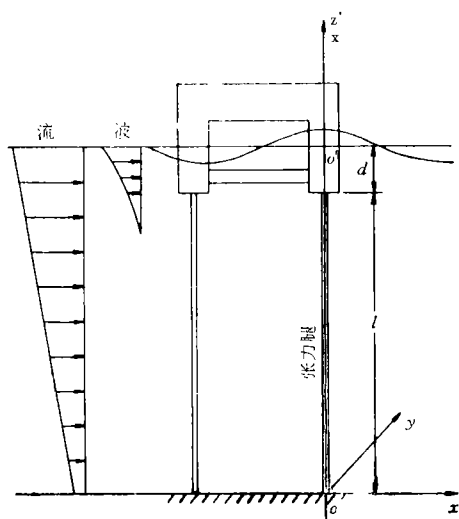


图1 张力腿平台系统

升力可表示为:

$$F_L(z, t) = \frac{1}{2} \rho D (V_c + u)^2 C_L \cos \omega_s t = K_L(z) C_L \cos \omega_s t, \quad (4)$$

式中,  $\rho$  为水的密度,  $D$  为张力腿的直径,  $V_c$  为流速 (在本文中是  $z$  的线性函数),  $C_L$  为升力系数,  $\omega_s$  为涡激频率. 同时

$$K_L(z) = \frac{1}{2} \rho D (V_c + u)^2,$$

其中,  $u$  是水平速度, 根据线性微幅波理论可写成:

$$u = u(z) = \frac{\pi H}{T_w} e^{kz'} \cos(kx + \omega_w t), \quad (5)$$

式中,

$$z' = z - (l + d),$$

$l$  是张力腿长,  $d$  是张力腿平台的吃水,  $H$  是波高,  $T_w$  是波周期,  $\omega_w$  是波浪的圆频率,  $k$  是波数,  $k = 2\pi/L_w$ .

张力腿在  $y$  方向运动所引起的流体动力可用莫里逊公式表示:

$$\begin{aligned} F_r(z, t) &= \frac{1}{2} \rho C_d D \dot{y} |\dot{y}| + C_a \rho \frac{\pi D^2}{4} \ddot{y} \\ &= K_d C_d \operatorname{sgn}(\dot{y}) \dot{y}^2 + m' \ddot{y}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $K_d = \rho D/2$ ,  $m' = C_a \pi D^2/4$ ,  $\operatorname{sgn} = 1$  或  $-1$ , 是由  $\dot{y}$  的正负号决定的.  $C_d$  和  $C_a$  分别为流体阻尼系数和附加质量系数.

升力系数  $C_L$  和流体阻尼系数  $C_d$  依赖于雷诺数  $Re$  和凯来根-卡蓬特数 (Keulegan-Carpenter)  $K$ . 附加质量系数  $C_a$  与结构振动频率有关, 它实质上是惯性系数. 本文研究涡激频率与结构固有频率相近的谐振, 取  $C_L = 0.6 \sim 2.4$ ,  $C_d = 0.4 \sim 2.0$  和  $C_a = 1.0$ .

## 2 求解方法

采用多项伽僚金法将上述偏微分方程 (1) 化成一组非线性常微方程组. 首先将横向位移  $y(z, t)$  表示成振型的级数形式, 即:

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (7)$$

再将式 (7) 代入式 (4) 和 (6), 并代入方程 (1), 根据伽僚金法可得:

$$\int_0^l R(z, t) \sin \frac{j\pi z}{l} dz = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \infty, \quad (8)$$

式中,  $R(z, t)$  称为留函数, 由下式表示:

$$\begin{aligned} R(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ EI \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 y_n(t) + (T_0 + T \cos \omega t) \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 y_n(t) \right. \\ &\quad \left. + C \dot{y}_n(t) + \bar{m} \ddot{y}_n(t) \right] \sin \frac{n\pi z}{l} + K_d C_d \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{y}_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\times \operatorname{sgn} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{y}_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l} \right] - K_L(z) C_L \cos \omega_s t, \quad (9)$$

式中,  $\bar{m} = m + m'$ , 表示张力腿单位长度的虚质量.

方程(8)代表常微分方程组, 其数量与位移表达式(7)所取 $n$ 的量有关. 因为非线性阻尼力项处理比较麻烦, 所以 $n$ 不宜太大. 同时, 为了运算方便, 引入下列符号:

$$D_j = K_d C_d \int_0^l \operatorname{sgn}(\dot{y}) \dot{y}^2 \sin \frac{j\pi z}{l} dz, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

式中,

$$\dot{y} = \dot{y}(z, t) = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i(t) \sin \frac{i\pi z}{l}. \quad (11)$$

应该说明的是式(10)中 $\operatorname{sgn}[\dot{y}(z, t)]$ 随时间 $t$ 及空间 $z$ 的变化, 不能用解析法确定. 不过, 由于非线性常微分方程可用对时间的逐步积分法求解, 而且对 $z$ 的积分式(10)亦可用分段积分近似地表示, 其 $\operatorname{sgn}[\dot{y}(z, t)]$ 就可以由上一时段中 $\dot{y}(z, t)$ 的数值确定. 在本文中只取 $n=3$ , 张力腿沿长度被分成12段. 方程组最终可写成:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n + [\lambda_{B_n}^2 + \lambda_{C_n}^2 (1 + \varepsilon \cos \omega t)] y_n + \frac{C_n}{m} \dot{y}_n + \frac{2K_d C_d}{\pi \bar{m}} D_n \\ = \frac{2C_L}{l \bar{m}} \cos \omega_s t \int_0^l K_L(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz, \quad n=1, 2, 3, \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $\lambda_{B_n}^2 = (n\pi/l)^4 (EI/\bar{m})$ , 为张力腿弯曲振动固有频率,  $\lambda_{C_n}^2 = (n\pi/l)^2 (T_0/\bar{m})$ , 为张力腿沿轴向振动的固有频率,  $C_n = 2\bar{m}(\lambda_{B_n}^2 + \lambda_{C_n}^2)^{1/2} \zeta_s$ , 为结构粘性阻尼系数,  $\zeta_s$ 为无因次结构阻尼比,  $D_n$ 由公式(10)定义, 用数值计算方法求得.

假定流沿水深为线性变化, 即:

$$V_c(z) = a + bz. \quad (13)$$

假定波浪是微幅波, 其波高为 $H$ , 周期为 $T_w$ , 波频记为 $\omega_w$ , 由公式(4)和(5)可得到方程(12)右边的具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \frac{2C_L}{l \bar{m}} \cos \omega_s t \int_0^l K_L(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz = A_c \cos \omega_s t + (A_w \cos 2\omega_w \\ + 2A_{c_w} \cos \omega_w t) \cos \omega_s t, \quad (n=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (14)$$

其中右边第一项代表由流作用而产生的涡激力, 第二项为波浪引起的力, 第三项是流和波共同作用产生的耦合涡激力. 各项的幅值表达式为:

$$A_c = \begin{cases} \frac{\rho DC_L}{l \bar{m}} \left\{ a^2 \left( \frac{2l}{\pi} \right) + 2ab \left( \frac{l^2}{\pi} \right) + b^2 \left[ \frac{l^3}{\pi} - 4 \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \right] \right\}, & n=1, 3, \\ - \frac{\rho DC_L}{l \bar{m}} \left[ ab \left( \frac{l^2}{\pi} \right) + b^2 \left( \frac{l^3}{2\pi} \right) \right], & n=2, \end{cases} \quad (15)$$

$$A_n = \begin{cases} \frac{\rho DC_L}{l\bar{m}} \left(\frac{\pi H}{T_w}\right)^2 \frac{\frac{n\pi}{l}}{4k^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} [e^{-2kd} + e^{-2k(l+d)}], & n=1, 3, \\ 0, & n=2, \end{cases} \quad (16)$$

$$A_{c,n} = \begin{cases} \frac{\rho DC_L}{l\bar{m}} \left(\frac{\pi H}{T_w}\right) \{aB_n [e^{-kd} + e^{-k(l+d)}] + b[B_n l e^{-kd} - 2k \bar{B}_n [e^{-kd} + e^{-k(l+d)}]]\}, & n=1, 3, \\ -\frac{\rho DC_L b \pi H}{l\bar{m} T_w} \bar{B}_n l e^{-kd}, & n=2, \end{cases} \quad (17)$$

式中,

$$B_n = \frac{\frac{n\pi}{l}}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}, \quad \bar{B}_n = \frac{\frac{n\pi}{l}}{\left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]^2}. \quad (18)$$

需要指出的是,方程(12)中 $D_n$ 是由式(10)定义的积分值,它是 $\dot{y}_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ )的二次函数.方程(12)实际是互相耦合的微分方程组,可以采用龙格-库塔法(Runge-Kutta)解.

### 3 实例分析

本文选取Conoco's Hutton张力腿平台为实例,有关计算的参数列于表1.数值计算分两步进行:首先只考虑流的作用,然后专门讨论波与流的联合作用.

采用四阶龙格-库塔法,令:

$$Y_1 = y_1(t), \quad Y_3 = y_2(t), \quad Y_5 = y_3(t). \quad (19)$$

利用式(19)及表1中有关物理参量,方程(12)可以写成如下6个一阶常微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= Y_2, \\ \frac{dY_2}{dt} &= 0.1304 C_L \cos \omega_c t - 0.00156 Y_2, \\ &\quad - [0.023 + 0.733(1 + \varepsilon \cos \omega t)] Y_1 + 0.1819 C_D D_1, \\ \frac{dY_3}{dt} &= Y_4, \\ \frac{dY_4}{dt} &= -0.0416 C_L \cos \omega_c t - 0.00326 Y_4 \\ &\quad - [0.3697 + 2.931(1 + \varepsilon \cos \omega t)] Y_3 + 0.1819 C_D D_2, \\ \frac{dY_5}{dt} &= Y_6, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{dY_6}{dt} = 0.0467C_L \cos \omega_s t - 0.00522Y_6$$

$$- [1.921 + 6.595(1 + \varepsilon \cos \omega t)] Y_5 + 0.1819C_D D_s,$$

式中,  $C_L$ 和 $C_D$ 取值范围如第二节所述, 中心激振频率 $\omega$ 选平台下沉频率的2倍. 本例中, 取 $\omega = 1.74 \text{ rad/s}$ . 动张力与预张力之比 $\varepsilon = 0.328$ . 这些值是根据奥林维瑞(Oliveira)<sup>(7)</sup>1988年提供的资料确定的.

表1 数值计算实例的物理参数

1. 流	$a = 0.4 \text{ m/s}$	$b = 1.2857 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
2. 波浪 (I)	$\omega_w = 0.5938 \text{ rad/s}$	$H = 10 \text{ m}$ $L_w = 175 \text{ m}$
(II)	$\omega_w = 0.4345 \text{ rad/s}$	$H = 20 \text{ m}$ $L_w = 327 \text{ m}$
3. 平台吃水	$d = 50 \text{ m}$	
4. 张力腿的参数		
长度 $l$ (m)	300	
外径 $D$ (m)	1.1176	
壁厚 $t$ (m)	0.038	
张力比 $\varepsilon = T/T_0$	0.328	
单位长度质量 $m$ (t/m)	1.000	
单位长度附加质量 $m$ (t/m)	1.006	
弯曲刚度 $EI$ (kN·m <sup>2</sup> )	$3.854 \times 10^6$	
固有频率 (rad/s)		
$\lambda_1$	0.869	
$\lambda_2$	1.817	
$\lambda_3$	2.910	
结构无因次阻尼比 $\zeta_s$	$1.8 \times 10^{-3}$	

当 $\omega_s = 0.869 \text{ rad/s}$ 时, 涡激频率与张力腿的第一固有频率接近产生谐振或称锁定. 图2给出 $C_L = 2.4$ ,  $C_D = 0.6$ ,  $\omega = 1.74 \text{ rad/s}$ ,  $\varepsilon = 0.328$ 情况下首谐振时三个模态的动力响应值 $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 、 $y_3(t)$ , 由此可看出 $y_1(t)$ 比 $y_2(t)$ 和 $y_3(t)$ 都大很多, 所以从动位移角度分析, 第二、第三模态影响不大, 可以忽略不计. 不过, 从下面的分析将看到, 第二、第三模态对动弯矩、动切力及动应力的贡献不能忽视.

弯矩 $M(z, t)$ 的表达式为:

$$M(z, t) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -43.2 \left\{ y_1(t) \sin \frac{\pi z}{l} + 4y_2(t) \sin \frac{2\pi z}{l} + 9y_3(t) \sin \frac{3\pi z}{l} \right\}. \quad (21)$$

对 $z = l/2$ ,

$$M\left(\frac{l}{2}, t\right) = -43.2 [y_1(t) - 9y_3(t)]. \quad (22)$$

由此可见,  $y_3(t)$ 对 $z = l/2$ 处的弯矩影响可达10%以上. 同理, 从动切力的表达式可知, 它们的影响不能忽略, 图3给出切力 $V$ 沿张力腿长度的分布. 其中 $V_1$ 、 $V_2$ 和 $V_3$ 分别表示各个模态

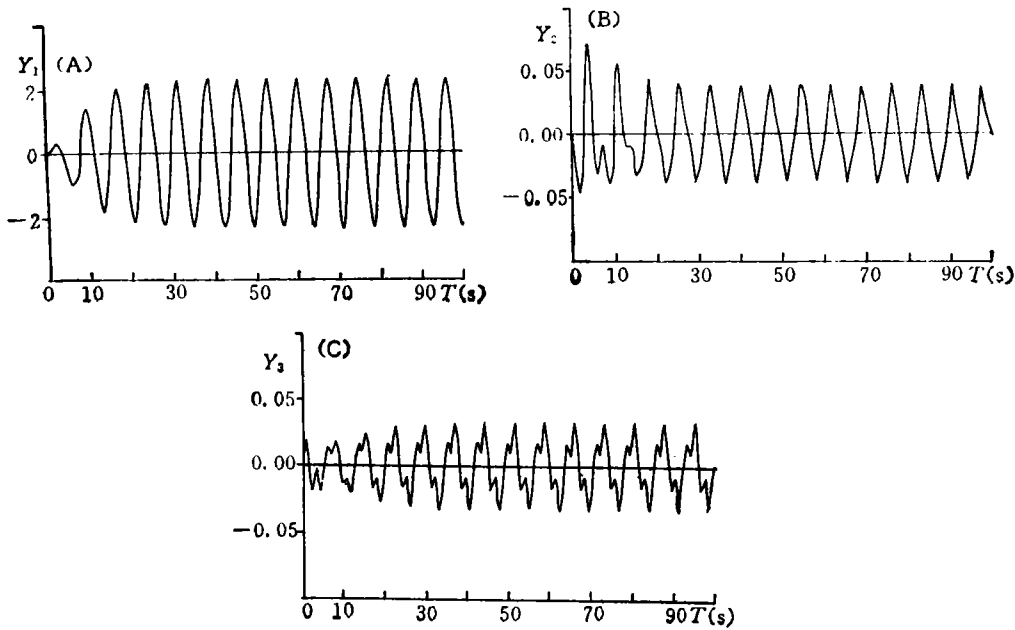


图2 流作用下，首谐振时各模态响应

$C_L=2.4, C_D=0.6, \omega=1.74 \text{ rad/s}, \omega_s=0.869 \text{ rad/s}$   
 (横坐标 $T$ 应为 $t$ )

对应的剪力响应。

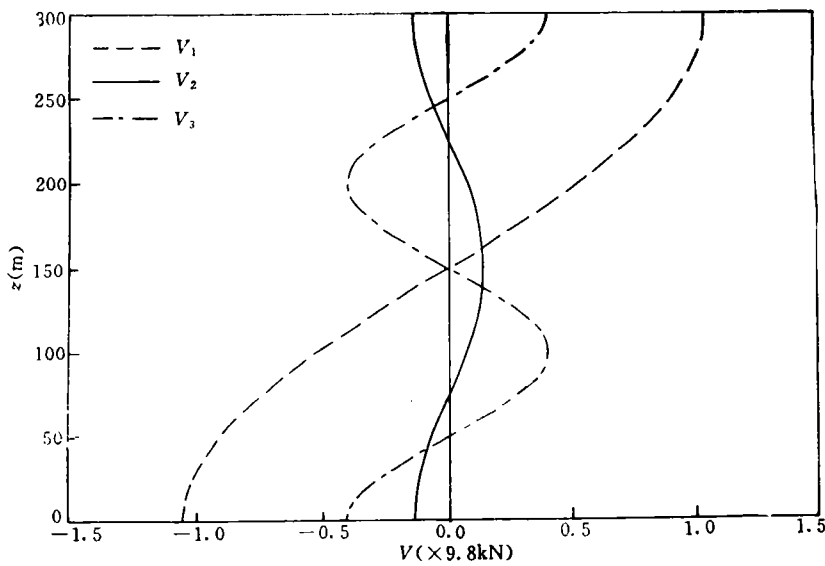


图3 首谐振时各模态剪力响应

$C_L=2.4, C_D=0.6, \omega=1.74 \text{ rad/s}, \omega_s=0.869 \text{ rad/s}$

下面讨论波流联合作用下平台张力腿的动力响应。首先分析不同波长的波，在取波高 $1/10 \sim 1/20$ 波长时，产生的有关力的幅值 $A_w$ 、 $A_{c_w}$ 与仅有流作用时的涡激力幅值 $A_c$ 之比。对波频等于涡激频率的情况，即波长 $L_w=82 \text{ m}$ 时， $A_w$ 、 $A_{c_w}$ 为 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 量级，与 $A_c$ 相比可

以忽略不计，经过详细研究选取表1中所列的两种情况：

( I )  $\omega_w=0.5938 \text{ rad/s}$ ,  $L_w=175 \text{ m}$ ,  $T_w=10.58 \text{ s}$ ,  $H=10 \text{ m}$ ,

( II )  $\omega_w=0.4345 \text{ rad/s}$ ,  $L_w=327 \text{ m}$ ,  $T_w=14.46 \text{ s}$ ,  $H=20 \text{ m}$ .

计算结果表明，第二种情况波浪作用的影响比第一种情况大，因此在下面分析时，我们取情况( II )。

图4给出当波频 $\omega_w=0.4345 \text{ rad/s}$ 时， $C_L=2.4$ ,  $C_D=0.6$ ,  $\omega=1.74 \text{ rad/s}$ 和 $\omega_s=0.869 \text{ rad/s}$ 情况下，张力腿涡激非线性响应各模态的情况 $y_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ )。与只有流作用下的响应图2所示结果相比较，可以清楚地看到：波、流共同作用使响应的非线性特征变得更为显著。这不但表现在响应的幅值变化，而且还表现在相位及响应频率的变化等方面。为说明产生这些变化的原因，下面将式(14)所示的波、流联合作用下的激振力项展开：

$$\begin{aligned}
 & A_w \cos \omega_s t + (A_w \cos 2\omega_w t + 2A_{c_w} \cos \omega_w t) \cos \omega_s t \\
 &= A_w \cos \omega_s t + \frac{1}{2} A_w [\cos(2\omega_w + \omega_s)t + \cos(2\omega_w - \omega_s)t] \\
 & \quad + A_{c_w} [\cos(\omega_w + \omega_s)t + \cos(\omega_w - \omega_s)t]. \tag{23}
 \end{aligned}$$

从该式可以看出，激振频率包括 $\omega_s$ ,  $(\omega_w \pm \omega_s)$ 三个部分。当 $\omega_w=1/2\omega_s$ 时，式(23)中除 $\omega_s$ 外还有与 $A_w$ 有关的 $2\omega_s$ 项，以及与 $A_{c_w}$ 有关的 $3/2\omega_s$ 、 $1/2\omega_s$ 项。这样，各阶模态响应历程显示强的非线性。

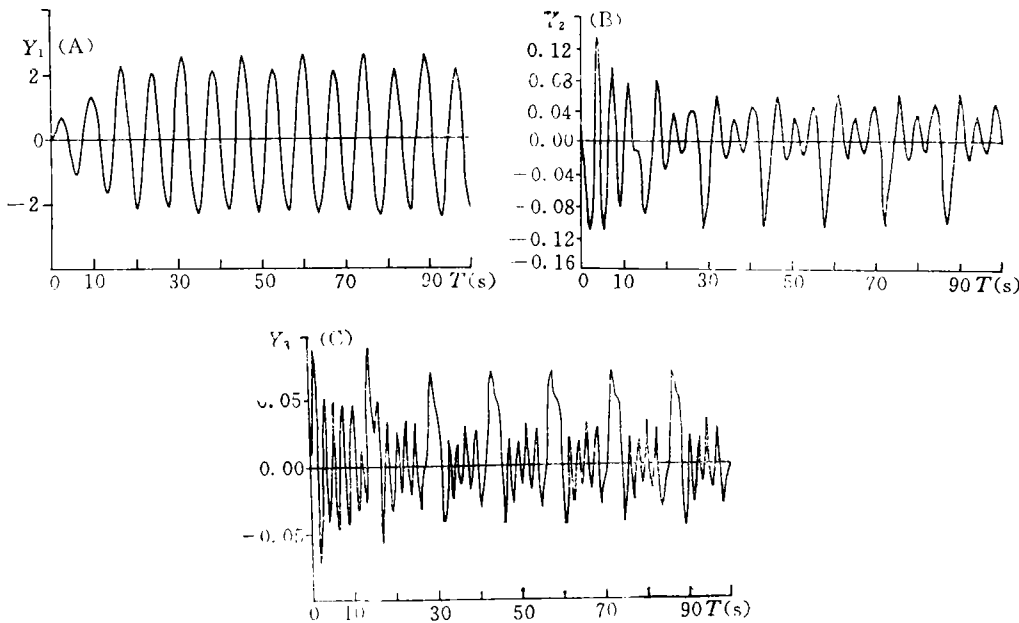


图4 波流联合作用下各模态的响应  
 $\omega_w=0.4345 \text{ rad/s}$  (其余参量值同图2)  
 (横坐标 $T$ 应为 $t$ )

## 4 结论

文中提出深水张力腿平台的张力腿在波浪和流共同作用下涡激非线性响应预报的数学模型和给出采用多项伽僚金法计算处理平方阻尼项的方法. 通过实例分析得到以下结论:

1. 采用多项伽僚金法是必要的. 用多个模态的响应值 $y_i(t)$ 分析张力腿的动力响应可以看出, 在 $\omega_s = \lambda_1$ 产生首谐振时, 虽然第二、第三个模态对位移响应只占 2% 左右, 但对弯矩、切力的影响可达10%、30%. 特别在考虑波、流共同作用时, 第二、第三模态在响应幅值上有大的变化, 而且它们与第一模态一样反映出强的非线性特性, 故对响应的影响就更加明显.

2. 波浪对流引起的涡激振动影响与波长有关. 在某些情况下可以忽略不计, 如本文中波长 $L_w < 100$  m, 由波引起的作用力就可以不考虑. 但在另外一些情况下, 波的作用不可忽视, 它不但改变响应的幅值, 而且还产生多种频率的作用力, 使响应呈现强非线性, 因此, 需要具体分析.

## 参考文献

- 1 King Roger. A review of vortex shedding research and its application. *Ocean Engineering*, 1977, 4, 141~171
- 2 Sarpkaya T. Vortex-induced oscillations: a selective review. *Journal of Applied Mechanics*, 1979, 46, 241~258
- 3 Iwan W D. The vortex-induced oscillation of non-uniform structural systems. *Journal of Sound and Vibration*, 79(2): 291~301
- 4 Lyons G J, M H Patal. Application of a general technique for prediction of riser vortex-induced response in waves and current. *Transactions of ASME*, 1989, 111, 82~91
- 5 Rajabi F, M F Zedan, A Mangiavacchi. Vortex shedding induced dynamic response of marine risers. *Transactions of ASME*, 1984, 106, 214~221
- 6 甘锡林, 朱胜昌. 旋转式单点系泊立管水弹性分析. *中国海洋平台*, 1990, (1): 15~17
- 7 Oliveira J de, Conoco Norway, Inc, S Fjeld, Norwegian contractor A/S. Concrete hulls for tension leg platforms. OTC 5636, Houston, 1988